Chapitre 23 : Intégrale généralisée
Feuille d'exercices

Exercice 1 Étudier la nature des intégrales suivantes et calculer leur valeur lorsqu'elles convergent

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{3t}\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad J_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad K_1 = \displaystyle\int_0^{3} \frac{2}{\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}\,t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan t\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad J_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x$ $\qquad K_2 = \displaystyle\int_0^{e} \ln t\,\mathrm{d}\,t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{t-3}\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad J_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4t+2}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad K_3 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}\,t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$ $\qquad J_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$ $\qquad K_4 = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \sin t\,\mathrm{d}\,t$

Exercice 2 Étudier la nature des intégrales suivantes à l'aide des critères de convergence

1. $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{3x^4+1}{\sqrt[3]{x^2}+x^3}\,\mathrm{d}\,x$ $\qquad J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x^2-3}{x^4+x+1}\,\mathrm{d}\,x$ $\qquad K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}\,x$
2. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^t\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad J = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad K = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sin(t^2)}\mathrm{d}\,t$

Exercice 3 Etudier la nature des intégrales suivantes à l'aide des critères de convergence

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} u^3 e^{-u}\,\mathrm{d}\,u$ $\qquad J_1 = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2\ln t}\,\mathrm{d}\,t$ $\qquad K_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\mathrm{d}\,t$ $\qquad J_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ $\qquad K_2 = \displaystyle\int_0^{4\pi^2} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}\,x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{3u^2+1}\,\mathrm{d}\,u$ $\qquad J_3 = \displaystyle\int_0^{3} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2-9}$ $\qquad K_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{e^x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$

Exercice 4 Étudier la nature des intégrales suivantes.
En cas de convergence, on précisera leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t \;;\; \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}\,t \;;\; \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x \;\; (\alpha\in\mathbb{R})$$

Exercice 5 Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}\,t. \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}\,t$$

Exercice 6 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}\,t.$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer à l'aide d'une intégration par partie une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7 (Exemple de fonction définie par une intégrale généralisée)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t.$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer en intégrant par parties que f est bien définie en 0.

3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}\,t = 0$.
   En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8 Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués.

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+e^x}}$ (poser $y = \sqrt{1+e^x}$)

$J = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t$ (poser $t = u^2$)

$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ (poser $u = \sqrt{x}$)

Exercice 9
1. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ convergent.
2. À l'aide du changement de variable $y = \frac{1}{x}$, montrer qu'elles sont de valeurs opposées.
3. Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$?

Exercice 10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t$.
1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad |f(x)| \leq \sqrt{2\pi}$.
3. Montrer que f est croissante sur $[-1, 1]$.
4. Montrer que, pour tout $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $0 \leq \sin(y) \leq y$.
5. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}x$.
6. En déduire que f est continue en 0.

Exercice 11
1. Montrer que les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}\,t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}\,t$ convergent et vérifient $I = J$.
2. Montrer que l'intégrale $K = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}\,t$ converge et vérifie $K = 2I$.
3. Montrer que $I + J = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2}K$.
4. En déduire la valeur de I, J et K.

Exercice 12 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.
Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\mathrm{d}x$$

Exercice 13
1. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt$ converge. *On pourra s'inspirer des questions 1. et 2.*

4. ** Montrer alors que pour tout réel t, $|\sin t| \geq \sin^2 t$ puis que $|\sin t| \geq \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t))$.*
5. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ ne converge pas absolument.

Exercice 14 À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 15 On note, sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, l'existence de I_n, J_n, K_n.
   Quelle relation y a-t-il entre I_n, J_n, K_n ?
2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n - J = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a : $\quad 0 \leq K_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$.
4. Conclure sur la limite de I_n.

Exercice 16 On s'intéresse aux intégrales de Bertrand : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\,(\ln x)^\beta}\mathrm{d}x$.

1. *Cas où $\alpha = 1$*
   a) À l'aide de primitives, déterminer la nature des intégrales suivantes :
   $$\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln x)^2}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln x}.$$
   b) Si $\alpha = 1$, à quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand est-elle convergente ?
2. *Cas où $\alpha > 1$*
   a) Donner la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\,\ln x}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\,(\ln x)^{-1}}$.
   b) Soit $\alpha > 1$ quelconque. À quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand correspondante est-elle convergente ?
3. *Cas où $\alpha < 1$*
   a) Donner la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^3}, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^{-2}}$.
   b) Soit $\alpha < 1$ quelconque. À quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Bertrand correspondante est-elle convergente ?

Exercice 17 Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi, F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variation de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. a) Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $\quad |e^{-a} - e^{-b}| \leq |a-b|$.
   b) En déduire que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\quad |F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|$.
   c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 1. Justifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. a) Justifier qu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x > 0,\quad f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

c) Montrer que pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leq \frac{e^{-x^2}}{x^3}$.

d) Montrer que : $\forall x > 0,\quad \dfrac{e^{-x^2}}{2x} - \dfrac{e^{-x^2}}{x^3} \leq f(x) \leq \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Étudier les variations de f.

4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 19 1. Calculer :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

2. Établir :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

3. En factorisant $1+t^4$, déterminer la valeur de I.

Exercice 20 Existence et valeur de

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t\rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 21 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a;b],\mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites :

$$\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

(on procédera par récurrence).

3. En utilisant le chapitre suivant pour donner un DL à l'ordre 3 de $\sin(x)$, montrer que

$$f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \in \mathcal{C}^1([0,\frac{\pi}{2}],\mathbb{R}).$$

4. En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5. Étudier la limite puis un équivalent de :

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$